УЛСЫН МАТЕМАТИКИЙН XXXXXIV ОЛИМПИАД

Бодлогууд

IX анги

Бодлого IX-A1. 2017^{2018} тоог хоёр бүтэн куб тооны нийлбэрт задалж болохгүй гэж батал. (1^3, 2^3, 3^3, ... тоонуудыг бүтэн куб тоо гэж нэрлэнэ.)

Бодлого IX-A2. Тэгш өнцөгт ABC гурвалжны AC катет дээр D цэг, AB катет дээр E цэгийг $AE \cdot EB = CD \cdot AD$ байхаар сонгон авчээ. Гурвалжны BC гипотенузын дундаж цэг M бол $ME = DM$ гэж батал.

Бодлого IX-A3. 9×9 хэмжээтэй хүснэгтийн зарим нүдийг буджээ. Тэгш тооны хөрш нүд нь будагдсан хүснэгтийн нүдний тоо хамгийн цөөндөө хэд байж болох вэ?

Бодлого IX-Б1. $a + b = 2$ байх дурын a, b тоонуудын хувьд

$$\sqrt{a^2 - a + 1} \cdot \sqrt{b^2 + b + 1} + \sqrt{a^2 + a + 1} \cdot \sqrt{b^2 - b + 1} \geq 2\sqrt{3}$$

тэнцэтгэл биш биелэхийг харуул.

Бодлого IX-Б2. Нэг тойрог дээр 54 ширхэг зоосыг байрлуулсан байв. Нэг удаагийн үйлдлээр хаа нэгтээ зэрэгцэн байрлах сүлдээрээ харсан 2 зоосыг эргүүлж тоогоор нь харуулж чадна, мөн тоогоороо харсан 2 зоосыг эргүүлж сүлдээр харуулж чадна. Энэ үйлдлийн тусламжтайгаар аль ч 2 нь бие биедээ шилждэггүй хэдэн ялгаатай байрлал олдох вэ?

Бодлого IX-Б3. $AB + AC = 2 \cdot BC$ бөгөөд $AC > AB$ байх хурц өнцөгт ABC гурвалжны BC талын үргэлжлэл дээр C оройгоос цаана D цэгийг $\angle ABD = 2 \cdot \angle ADB$ байхаар сонгон авчээ.

$$CD = 5 \cdot AB - 4 \cdot BC$$

болохыг харуул.

X анги

Бодлого X-A1. $\{a_n\}_{n\geq 1}$ дарааллыг $n \geq 1$ үед

$$a_{n+1} = \frac{n+2}{n}(a_n - 1)$$

гэсэн рекуррент томъёогоор тодорхойлжээ. a_1 нь бүхэл тоо бол дарааллын бүх гишүүн бүхэл тоо гэж харуул.

Бодлого X-A2. ABC гурвалжны BC талын дундаж цэг M байв. AM шулуун дээр орших өгсөн K цэгийг дайрсан AM-д перпендикуляр шулуун дээр $XK = YK$ байх X, Y цэгүүдийг сонгон авчээ. X цэгийг дайрсан AB шулуунд перпендикуляр шулуун Y цэгийг дайрсан AC шулуунд перпендикуляр шулуунтай Z цэгт огтлолцдог бол $BC \perp ZK$ болохыг батал.

Бодлого X-A3. $a^2 < b^3 < c^4 < d^5$ тоонууд нь арифметик прогресс үүсгэх натурал a, b, c, d тоонууд олдох уу?

Бодлого X-Б1. Дурын эерэг a, b, c тоонуудын хувьд

$$a^4 + b^4 + c^4 + \frac{a^2}{(b+c)^2} + \frac{b^2}{(c+a)^2} + \frac{c^2}{(a+b)^2} \geq ab + bc + ca$$

тэнцэтгэл биш биелэхийг харуул.

Бодлого X-Б2. ABC гурвалжны A, C оройнуудыг дайрсан гурвалжны BC талыг C цэгт шүргэдэг ω тойргийг татжээ. BC талын дундаж цэг M бөгөөд AM шулуун ω тойргийг A цэгээс ялгаатай D цэгт огтолно, харин BD шулуун ω тойргийг D цэгээс ялгаатай E цэгт огтлолно. AMC гурвалжныг багтаасан тойрог CE хэрчмийн дундаж цэгийг дайрна гэж батал.

Бодлого X-Б3. 10-аас олонгүй ялгаатай үсэгтэй үг өгөгджээ. Өгсөн үгийн ялгаатай үсгүүдийг ялгаатай цифрээр, ижил үсгүүдийг ижил цифрээр сольж 9-д хуваагддаг тоо гаргаж чадахыг харуул.

XI анги

Бодлого XI-A1. Нийлбэр нь 0 байдаг дурын бодит x, y, z тоонуудын хувьд

$$\left(\frac{x^2 + y^2 + z^2}{3}\right)^3 \geq Kx^2y^2z^2$$

тэнцэтгэл биш биелдэг байх K-ийн хамгийн их утгыг ол.

Бодлого XI-A2. Бодлого **X-A3**.

Бодлого XI-A3. Элдэв талт, хурц өнцөгт ABC гурвалжны өндрүүдийн огтлолцлын H цэгийг дайрсан шулуун гурвалжны AB, AC талуудыг харгалзан D, E цэгт огтлох бөгөөд $AD = AE$ байв. Гурвалжны BC талын дундаж цэг M бөгөөд MH цацраг ABC гурвалжныг багтаасан тойргийг K цэгт огтолно. A, D, E, K цэгүүд нэг тойрог дээр оршихыг батал.

Бодлого XI-Б1. Натурал x, y, z тоонуудын хувьд

$$\frac{xy^2}{z} + \frac{y^3z^4}{x} + \frac{z^5x^6}{y}$$

нийлбэр бүхэл тоо бол бүх нэмэгдэхүүн нь бүхэл гэдгийг батал.

Бодлого XI-Б2. ABC гурвалжны AC тал дээр D цэгийг сонгон авч ABD, BCD гурвалжнуудад багтсан тойргийн төвүүдийг харгалзан I_1, I_2 гэж тэмдэглэв. BI_1I_2 гурвалжныг багтаасан тойрог AB шулууныг дахин X цэгт, харин BC шулууныг дахин Y цэгт тус тус огтолдог бол $AX + CD = CY + AD$ гэж батал.

Бодлого XI-Б3. $n \geq 2$ үед $2n \times 2n$ хэмжээтэй квадратыг 1×2 хэмжээтэй тэгш өнцөгтөд хуваах боломжийн тоо нь $3n \times 3n$ хэмжээтэй квадратыг 1×3 хэмжээтэй тэгш өнцөгтөд хуваах боломжийн тооноос бага гэдгийг батал.

XII анги

Бодлого XII-А1. Нийлбэр нь 0 байдаг дурын бодит x, y, z тоонуудын хувьд координатын хавтгай дээр орших

$$(x, P(x)), \ (y, P(y)), \ (z, P(z))$$

координаттай цэгүүд нэг шулуун дээр оршдог байх бодит коэффициенттэй бүх P олон гишүүнтийг ол.

Бодлого XII-А2. ω тойргийн гадна орших A цэгээс уг тойрогт AB, AC шүргэгчүүд татаад AC хэрчмийн үргэлжлэл дээр C цэгээс цаана P цэгийг сонгон авчээ. ABP гурвалжныг багтаасан тойрог ω тойрогтой B цэгээс ялгаатай E цэгт огтлолцох ба BP хэрчим дээр $\angle PEQ = 2\angle APB$ байхаар Q цэг авав. $CQ \perp BP$ гэж батал.

Бодлого XII-А3. Натурал тоон $\{a_n\}_{n\geq 1}$ дараалал ба анхны тоон $\{p_n\}_{n\geq 1}$ дарааллын хувьд $n \geq 1$ үед

$$p_n \mid a_n \quad \text{бөгөөд} \quad a_{n+1} = \frac{a_n}{p_n}(p_n^{1009} - 1)$$

гэсэн нөхцөлүүд биелдэг байв. Энэ дараалалд 2018-д хуваагддаг a_n гишүүн олдохыг батал.

Бодлого XII-Б1. ABC гурвалжныг багтаасан ω тойргийн A оройг агуулдаггүй BC нум дээр дунджаас нь ялгаатай D цэгийг сонгож авчээ. D цэгт татсан ω тойргийн шүргэгч нь BC шулууныг K цэгт огтолно. K цэгийг дайрсан шулуун шулуун ω тойргийг E, F цэгүүдээр, AC, AD, AB хэрчмүүдийг харгалзан N, M, L цэгүүдээр огтолдог байв. $NE = LF$ бол $ML = MN$ гэж батал.

Бодлого XII-Б2. Бүхэл коэффициенттэй $f(x)$, $g(x)$ олон гишүүнтүүд өгөгджээ. Ямар ч натурал n тооны хувьд $f(n)$, $g(n)$ тоонуудын хамгийн их ерөнхий хуваагч a_n нь 2018-аас бага байв. Дурын n-ийн хувьд $a_{n+k} = a_n$ байх тогтмол k тоо олдохыг, өөрөөр хэлбэл энэ дараалал үетэй гэдгийг батал.

Бодлого XII-Б3. Бүхэл тоонуудын (a, b, c, d) дөрвөлийг $ad - bc = 2018$ байвал *сайн дөрвөл* гэе. Сайн дөрвөлүүдэд дараах 3 төрлийн үйлдлийг хийж болно. Эдгээр үйлдэлүүдийн тусламжтайгаар бие биедээ шилждэггүй сайн дөрвөлүүдийн олонлог хамгийн олондоо 3030 элементтэй гэж харуул.

$$(a, b, c, d) \longrightarrow (-c, -d, a, b)$$
$$(a, b, c, d) \longrightarrow (a, b, c + a, d + b)$$
$$(a, b, c, d) \longrightarrow (a, b, c - a, d - b)$$

Бага ангийн багш

Бодлого ББ-А1. Цэцэг нэгэн урт романыг 6 сарын 1-нээс 30-ныг дуустал 30 хоногт уншиж дуусгажээ. Тэрээр 1-нээс 20-ныг дуустал дунджаар хоногт 20 хуудас, 6-наас 25-ныг дуустал дунджаар 30 хуудас, 11-нээс 30-ныг дуустал дунджаар 40 хуудас уншсан. Уг роман хамгийн ихдээ болон хамгийн багадаа хэдэн хуудастай байж болох вэ?

Бодлого ББ-А2. Есөн оронтой $\overline{abcabcbbb}$ тоо нь 1-ээс 17 хүртэлх бүх натурал тоонд хуваагддаг байх a, b, c цифрүүдийг ол. Цифрүүд ялгаатай байх албагүй.

Бодлого ББ-А3. $a^3 < b^5 < c^7$ тоонууд нь арифметик прогресс үүсгэх натурал a, b, c тоонууд олдох уу?

Бодлого ББ-Б1. Улаанбаатараас Сайншанд хүртэл 450 км зайтай. Улаанбаатараас Отгоо, Баяраа, Базар 3 нэг машинтай гарсан ба машины заалт дунджаар 1 литр бензинээр хэдэн км зам явж байгааг заадаг байв. Анх Отгоо жолоо барьж 200 км газар явахад машины заалт 6.6 км/л болсон бөгөөд машины заалтыг тэглэж цааш 200 км газрыг Баяраа жолоо барьж туулахад заалт 8.4 км/л болжээ. Үлдсэн замыг Базар жолоо барьж туулан Сайншандад ирэхэд машины заалт 8.2 км/л болжээ. Хэрэв Баяраа машины заалтыг тэглээгүй бол Сайншандад ирэхэд машины заалт хэд байх байсан бэ?

Бодлого ББ-Б2. Дараалсан 54 ширхэг натурал тооны квадратуудын нийлбэр бүтэн квадрат тоо биш гэдгийг батал. Натурал тооны квадрат болдог тоог бүтэн квадрат тоо гэнэ.

Бодлого ББ-Б3. Аль нэг тоог нь дарахад, үлдэх тоонууд нь зүүнээсээ баруун тийш өсөх эрэмбэтэй байхаар $1, 2, \ldots, 53, 54$ тоонуудыг нэг мөрөнд хэдэн ялгаатай аргаар бичиж болох вэ?

Дунд ангийн багш

Бодлого ДБ-А1. Бодлого **XI-A1**.

Бодлого ДБ-А2. ABC гурвалжинд багтсан тойргийн төв I бөгөөд гурвалжны A оройд гадаад багтсан γ тойрог BC талыг E цэгт шүргэнэ. EI хэрчмийн дундаж цэг N бол BCN гурвалжныг багтаасан тойрог γ тойргийг шүргэнэ гэж батал.

Бодлого ДБ-А3. Бодлого **XII-A3**.

Бодлого ДБ-Б1. Бодлого **XII-Б2**.

Бодлого ДБ-Б2. Бодлого **XI-Б3**.

Бодлого ДБ-Б3. p, q нь $p > q \geq 5$ байх анхны тоонууд бол $(p+q)^{p+q}(p-q)^{p-q} - 1$ тоо $(p+q)^{p-q}(p-q)^{p+q} - 1$ тоонд хуваагдахгүй гэж батал.

УЛСЫН МАТЕМАТИКИЙН XXXXXV ОЛИМПИАД

Бодлогууд

Дунд ангилал

Бодлого ДА-1. $-3 \leq x, y \leq 3$ тоонуудын хувьд

$$0 \leq (x^2+1)(y^2+1) + 4(x-1)(y-1) \leq 164$$

тэнцэтгэл биш биелэхийг батал.

Бодлого ДА-2. $\angle ABC = \angle ADC = 90^\circ$ бөгөөд $\angle BCD < 90^\circ$ байх $ABCD$ дөрвөн өнцөгт өгөгдөв. P, Q цэгүүдийг $\angle APC = \angle AQC = \angle BCD$ байхаар харгалзан CB, CD цацрагууд дээрээс авав. $BCDE$ дөрвөн өнцөгт параллелограмм болдог E цэгийн хувьд EDB гурвалжныг багтаасан тойргийн төв PQ хэрчмийн дундаж цэг болно гэж батал.

Бодлого ДА-3. Натурал m, n тоонуудын хувьд $A = m^4 + 3m^2n^2 + n$ тоо

$$B = n^3 + 4mn^2 + 3m^2n + 4m^3 - 1$$

тоонд хуваагддаг бол B тоо ямар нэг анхны тооны 4 зэрэгтэд хуваагдана гэж батал.

Бодлого ДА-4. Натурал n тооны хамгийн том анхны тоон хуваагчийг $P(n)$ гэж тэмдэглэе. $P(n-1)$, $P(n)$, $P(n+1)$ тоонууд бүгдээрээ $2\sqrt{n}$ тооноос бага байдаг $n \geq 2^{2019}$ тоо олдоно гэж харуул.

Бодлого ДА-5. Элдэв талт ABC гурвалжинд багтсан I төвтэй тойрог BC талыг E цэгт шүргэх ба AI шулуун BC талыг F цэгт огтолно. ABC гурвалжныг багтаасан тойрог AEF гурвалжныг багтаасан тойргийг A цэгээс ялгаатай D цэгт огтолдог бол $\angle ADI = 90^\circ$ гэж батал.

Бодлого ДА-6. Сондгой тооны сурагчтай анги байв. Сурагч бүр ядаж нэг найзтай ба ерөнхий найзтай ямар ч хоёр сурагч ялгаатай тооны найзтай байв.

а) Яг 3 найзтай сурагч үргэлж олдох уу?

б) Яг 6 найзтай сурагч үргэлж олдох уу?

Ахлах ангилал

Бодлого АА-1. $2n$ оройтой олон өнцөгт бүрийн хувьд түүнийг тэнцүү тооны оройтой хоёр олон өнцөгтөд хуваадаг, уг олон өнцөгтөд бүхлээрээ багтдаг диагональ татаж чаддаг байх бүх $n \geq 2$ тоог ол.

Бодлого АА-2. ABC гурвалжны A, C цэгүүдийг дайрсан тойрог AB, BC хэрчмүүдийг харгалзан B цэгээс ялгаатай M, K цэгүүдэд огтолдог байв. BKM гурвалжныг багтаасан тойрог AK хэрчимтэй D цэгт огтлолцдог ба BD шулуун MK хэрчимтэй S цэгт, AC хэрчимтэй L цэгт огтлолцдог байв. AB тал дээр T цэгийг $\angle ALT = \angle CBL$ байхаар авсан бол TS шулуун AK шулуунтай параллель гэж батал.

Бодлого АА-3. Дурын натурал $k \geq 1$ тооны хувьд 7^k тоонд хуваагдах

$$1 + 2^n + 3^n$$

хэлбэрийн тоо олдоно гэдгийг батал.

Бодлого АА-4. $0 \leq a_1, a_2, \ldots, a_n \leq 1$ тоонуудын хувьд

$$\frac{1 - a_1 a_2 \ldots a_n}{n} \leq \frac{1}{1 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n}$$

тэнцэтгэл биш биелэхийг батал.

Бодлого АА-5. 20×20 хүснэгтийн зарим нүдийг хар өнгөөр будахыг будалт гэе. Өгөгдсөн P будалтын хувьд хүснэгтээ хоёроос олонгүй тооны хар нүдтэй тэгш өнцөгтүүдэд шугамын дагуу хуваахад нэгээс олонгүй тооны хар нүдтэй тэгш өнцөгтийн тоо хамгийн багадаа $n(P)$ байдаг гэе. $n(P)$ тооны авч болох хамгийн их утгыг ол.

Бодлого АА-6. I төвтэй ω тойргийг багтаасан $ABCD$ дөрвөн өнцөгт өгөгдөв. AD, BC шулуунууд Q цэгт, харин AB, CD шулуунууд P цэгт огтлолцдог бөгөөд B цэг AP хэрчим дээр, D цэг AQ хэрчим дээр байв. PBD, QBD гурвалжнуудад багтсан тойргийн төвүүдийг харгалзан X, Y гэе. PY, QX шулуунууд R цэгт огтлолцдог бол $RI \perp BD$ гэж батал.

Дунд ангийн багш

Бодлого ДБ-1. $p \geq 2$ анхны тоо ба p тоотой харилцан анхны a, b натурал тоонууд өгөгдөв. $\left(a^{p-1}-1\right)+55\left(b^{p-1}-1\right)$ нийлбэр p^2-д хуваагддаг бол $\left(a^{p(p-1)}-1\right)+55\left(b^{p(p-1)}-1\right)$ нийлбэр p^3-д хуваагдана гэж харуул.

Бодлого ДБ-2. $0 < x_0 < 1$ ба $n \geq 1$ үед

$$x_n^{2n-1} = x_{n-1} \cos x_n$$

байдаг $\{x_n\}$ дараалтын хувьд $\{n(1-x_n)\}$ дараалал зааглагдсан гэж харуул.

Бодлого ДБ-3. I төвтэй ω тойргийг багтаасан, O төвтэй Ω тойрогт багтсан $ABCD$ гүдгэр дөрвөн өнцөгтийн AC, BD диагнолиуд E цэгт огтлолцоно. ω тойрог AD, AB талуудыг харгалзан P, Q цэгүүдэд шүргэх ба E цэгээс PQ шулуунд буулгасан перпендикулярын суурь T бол AO ба IT шулуунууд Ω тойрог дээр огтлолцоно гэж батал.

Бодлого ДБ-4. $a_1^2+\cdots+a_n^2$ нийлбэр $(a_1+\cdots+a_n)^2-1$ тоог хуваадаг байх a_1, ..., a_n натурал тоонууд олддог чанартай хамгийн бага натурал $n \geq 2$ тоог ол.

Бодлого ДБ-5. Огторгуйд өгөгдсөн тэг биш 7 вектороос хоорондох өнцөг нь хурц байх хоёр вектор сонгож чадна гэж харуул.

Бодлого ДБ-6. Сондгой тоо k ба бүхэл коэффициенттэй k зэргийн $Q(X)$ олон гишүүнт өгөгдөв. Дурын бүхэл n тооны хувьд $P(n) = Q(m)$ байх бүхэл m тоо олддог чанартай бүх бодит коэффициенттэй k зэргийн $P(X)$ олон гишүүнтийг ол.

УЛСЫН МАТЕМАТИКИЙН XXXXXVII ОЛИМПИАД

Бодлогууд

Дунд ангилал

Бодлого Д1. Ямар ч натурал m, n тоонуудын хувьд $m^4+2mn+n^2-2021$ тоог хэдэн дараалсан натурал тооны үржвэрт тавьж болохгүй гэж батал.

Бодлого Д2. ABC гурвалжны дотор талд $AD = DC$ байх D цэг авав. BC талын дундаж цэгийг M гэе. B оройгоос DM шулуун руу буулгасан перпендикуляр шулуун AC шулууныг N цэгт огтолно. N цэгээс CD шулуун руу буулгасан перпендикулярын суурийг L гэвэл A, B, L, N цэгүүд нэг тойрог дээр оршино гэж батал.

Бодлого Д3. $n \geq 3$ гэе. a_1, a_2, ..., a_n бодит тоонуудын нийлбэрийг $S = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ гээд

$$\text{дурын } 1 \leq k \leq n \text{ дугаарын хувьд } 0 \leq S - a_k \leq 1 \text{ байна} \qquad (*)$$

гэсэн нөхцөлийг авч үзье. Мөн $m = \min\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ ба $M = \max\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ гэе.

(i) a_1, a_2, ..., a_n тоонууд $(*)$ нөхцөлийг хангахаар гүйх үед M тооны авч болох хамгийн их утгыг ол.

(ii) a_1, a_2, ..., a_n тоонууд $(*)$ нөхцөлийг хангахаар гүйх үед m тооны авч болох хамгийн бага утгыг ол.

Бодлого Д4. ABC гурвалжны AB тал дээрх D цэг ба BC тал дээрх E цэгийн хувьд $|AD| = |CE|$ ба $2|DE| = |AC|$ нөхцөлүүд биелдэг байв. Тэгвэл BDE гурвалжныг багтаасан тойргийн радиус ABC гурвалжныг багтаасан тойргийн радиусаас 2 дахин бага гэж батал.

Бодлого Д5. $p \geq 3$ анхны тоо гэе. Багш самбарт $n = 2p$ ширхэг бүхэл тоо бичив. Сурагч эндээс нэг эсвэл түүнээс олон хэсэг тоо сонгон авч тэдний нийлбэрийг n-д хуваахад гарсан үлдэгдлийг дэвтэртээ бичнэ. Бүх боломжит сонголтод харгалзах $2^n - 1$ ширхэг үлдэгдлийг бичихэд дэвтэрт 1, 2, ..., $p - 1$, $p + 1$, ..., $n - 1$ үлдэгдлүүд ижил тоотой бичигджээ.

Багшийн бичсэн тоонуудын нийлбэрийг p-д хуваагдана гэж батал.

Бодлого Д6. Дурын бодит a, b, c тоонуудын хувьд

$$a^2 + b^2 + c^2 + \frac{2ab}{1 + |a - b|} \geq \frac{2bc}{1 + |b + c|} + \frac{2ca}{1 + |c + a|}$$

гэж батал.

Ахлах ангилал

Бодлого А1. $1 \geq d_1 \geq \cdots \geq d_n \geq 0$ байх бодит тоонуудын хувьд

$$\frac{(1 + d_1 + d_2 + \cdots + d_n)^2}{n + 1} \geq 2 \cdot \frac{d_1^2 + 2d_2^2 + \cdots + nd_n^2}{n}$$

тэнцэтгэл биш биелэхийг батал.

Бодлого A2. D оройдоо мохоо өнцөгтэй, AB ба CD суурьудтай $ABCD$ трапецын AC, BD диагоналиуд O цэгт огтлолцоно. AB суурьтай параллель, O цэгийг дайрсан шулуун BCO гурвалжныг багтаасан тойрогтой P цэгт огтлолцоно. Хэрэв ADO, BCO гурвалжнуудыг багтаасан тойргууд дахин Q цэгт огтлолцдог бол PQ шулуун BC хэрчмийг хагаслан хуваана гэж батал.

Бодлого A3. $0 < a_1, a_2, \ldots, a_{2021} < 2$ бөгөөд $a_1 + a_2 + \cdots + a_{2021} = 2021$ байх ямар ч бодит тоон $a_1, a_2, \ldots, a_{2021}$ дарааллын хувьд $0 < b_1, b_2, \ldots, b_n < 2$ бөгөөд $b_1 + b_2 + \cdots + b_n = n$ байх бодит тоон $b_1, b_2, \ldots, b_n$ дараалал дараах нөхцөлийг хангадаг байхаар олддог байх натурал n тооны хамгийн бага утгыг ол. Үүнд

$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_{2021},\ b_1,\ b_2, \ldots,\ b_n$$

дарааллын ямар нэг $c_1, c_2, \ldots, c_{n+2021}$ сэлгэмлийн хувьд

$$\begin{cases} 1 \le l \le n + 2021 \text{ байх сондгой } l \text{ бүрийн хувьд} & c_1 + c_2 + \cdots + c_l \le l, \\ 1 \le l \le n + 2021 \text{ байх тэгш } l \text{ бүрийн хувьд} & c_1 + c_2 + \cdots + c_l \ge l \end{cases} \qquad (\star)$$

байна.

Бодлого A4. $ABCD$ дөрвөн өнцөгтөд r радиустай тойрог багтаж байв. ABC ба ACD гурвалжинд багтсан тойргийн төвийг тус тус J ба K гээд AJK ба CJK гурвалжныг багтаасан тойргийн төвийг тус тус P ба Q гэе. Тэгвэл

$$|PQ| = |AC| - \frac{S_{AJCK}}{r}$$

гэж батал. Энд S_{AJCK}-аар $AJCK$ дөрвөн өнцөгтийн талбайг тэмдэглэв.

Бодлого A5. Натурал a, b тоонуудын хувьд $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a}$ хэлбэртэй бичигдэх рационал тоог *сайн* тоо гэе.

(i) Дурын натурал $n \ge 4$ тоог хэдэн ширхэг сайн тооны үржвэрт тавьж болно гэж харуул.

(ii) $n = 57$ тоог хамгийн цөөндөө хэдэн ширхэг сайн тооны үржвэрт тавьж болох вэ?

Бодлого A6. α, β ялгаатай бодит тоонууд байг. Бодит тоон $A_1, A_2, \ldots$ дарааллыг $n \ge 1$ хувьд

$$A_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$$

гэж тодорхойлъё. Ямар нэг анхны p тооны хувьд A_p, A_{p+1}, A_{p+2} гишүүд бүхэл тоо байдаг бол дарааллын бүх гишүүн бүхэл гэдгийг үзүүл.

УЛСЫН МАТЕМАТИКИЙН XXXXXVIII ОЛИМПИАД

Бодлогууд

Дунд ангилал

Бодлого Д1. ABC гурвалжны AC тал дээр F цэг авав. F цэгийг дайруулан AB талтай параллел шулуун татахад BC талыг D цэгт огтолно. Мөн F цэгийг дайруулан BC талтай параллел шулуун татахад AB талыг E цэгт огтолно. EDF гурвалжныг багтаасан тойрог AC талыг шүргэж байв. $AB : BC = k$ бол $AF : FC = k^2$ гэж батал.

Бодлого Д2. $\dfrac{a}{a+1} + \dfrac{a}{a+2} + \dfrac{a}{a+3} + \dfrac{a}{a+4}$ илэрхийлэл бүхэл тоо байх эерэг рационал a тоо олдох уу?

Бодлого Д3. Математикийн олимпиадад 66 сурагч оролцов. Бие биеэ таньдаг хоёр сурагчийг танил гэе.

Сурагч бүр ядаж нэг танилтай ба сурагч бүрийн хувьд түүний танилуудын танилын тооны арифметик дундаж ба өөрийнх нь танилын тоо нийлээд 11 байсан бол нэг танхимд танил хоёр сурагч ороогүй байхаар сурагчдыг хоёр танхимд хуваан суулгаж чадна гэж батал.

Бодлого Д4. Тойргийг нэгж урттай 21 ширхэг тэнцүү нумд хуваадаг 21 цэг тойрог дээр байрлуулав. Аль ч хоёр цэгийн хоорондох нумын урт нь 3 нэгж эсвэл 7 нэгжтэй тэнцдэггүй байхаар 7 цэгийг хэдэн янзаар сонгон авч болох вэ?

Бодлого Д5. ABC гурвалжны AB тал дээр D цэгийг, AC тал дээр E цэгийг $BCED$ дөрвөн өнцөгт тойрогт багтаж байхаар авав. ADC гурвалжныг багтаасан тойрог BE хэрчимтэй F цэгт, ABE гурвалжныг багтаасан тойрог CD хэрчимтэй G цэгт огтлолцоно. BG, CF хэрчмүүд S цэгт огтлолцох бол $\angle FAS = \angle GAS$ гэж батал.

Бодлого Д6. $-1 \le a, b, c \le 1$ тоонуудын хувьд $a^2 + b^2 + c^2 = 2abc + 1$ бол

$$\frac{3}{2-abc} \le \frac{1}{2-a^2} + \frac{1}{2-b^2} + \frac{1}{2-c^2} \le 1 + \frac{2}{2-abc}$$

гэж батал.

Ахлах ангилал

Бодлого А1. Хос хосоороо ялгаатай X, Y, Z цэгүүд ω тойрог дээр цагийн зүүний дагуу энэ дараалллаараа байрлана. ω тойрогт цагийн зүүний дагуу хоорондоо тэнцүү урттай XA, YB, ZC гурван шүргэгч татав . XY шулуун AB хэрчмийг M цэгт, YZ шулуун BC хэрчмийг N цэгт огтолдог бол MN хэрчим ABC гурвалжны дундаж шугам болно гэж батал.

Бодлого А2. $n \geq 2$ гэе. Уран зургийн галерейн үзэсгэлэнгийн танхимд $2n$ хүн тойрог болон зогссон ба бүгд нэг нэг зураг барьсан байв. Хүн болгоны толгойд тэнд байгаа $2n$ зургийг аль дуртай гаасаа дургүй рүүгээ эрэмбэлэн жагсаасан жагсаалт бий. Зэрэгцэн зогссон хоёр хүн хоёулаа өөрийнхөө барьж байгаа зургаас илүү нөгөөгийнхөө барьсан зурагт дуртай байвал зургуудаа солилцоно. Хамгийн олондоо хэдэн удаа солилцоо хийж болох вэ?

Бодлого А3. Бүхэл коэффициенттой, гурван зэргийн олон гишүүнтийг гурван бодит язгууртай ба язгуурууд нь бүгд 0-ээс их 1-ээс бага иррационал тоо байдаг бол *сайн* гэе.

а) Ахлах гишүүнийх нь коэффициент 10-тай тэнцүү байдаг сайн олон гишүүнт олдох уу?

б) Ахлах гишүүнийх нь коэффициент 13-тай тэнцүү байдаг сайн олон гишүүнт олдох уу?

Бодлого А4. a, b бүхэл тоонууд ба $|a| \geq 2$ гэе. a^1+b, a^2+b, ..., a^n+b, ... дараалал бүгд зохиомол тоо байх дараалсан 2022 гишүүнтэй болохыг харуул.

Бодлого А5. Адил хажуут биш ABC гурвалжны BC тал дээр A_1 цэгийг, CA тал дээр B_1 цэгийг, AB тал дээр C_1 цэгийг $\angle B_1AC_1 = \angle B_1A_1C_1$, $\angle C_1BA_1 = \angle C_1B_1A_1$ болон $\angle A_1CB_1 = \angle A_1C_1B_1$ байхаар авав. $A_1B_1C_1$ гурвалжныг багтаасан тойрог BC талыг A_2 цэгт, CA талыг B_2 цэгт, AB талыг C_2 цэгт дахин огтолдог байв.

AA_2, BB_2, CC_2 шулуунууд нэг цэгт огтлолцох гарцаагүй бөгөөд хүрэлцээтэй нөхцөл нь $\angle BC_1A_1 = \angle A_1B_1C$ гэж батал.

Бодлого А6. 30 сурагчтай ангийн сурагчид 10, 10, 10-аараа гурван эгнээ болон сууна. Сар болгоны эхний өдөр багш сурагчдын байрыг сэлгэж суулгадаг. Хамгийн багадаа хэдэн сарын дотор аль ч хоёр сурагч ядаж нэг сар нэг эгнээнд суусан байхаар сэлгэн суулгаж чадах вэ?

Дунд ангийн багш

Бодлого Б1. $4z^2(2z^2+1) = 4xy - 2x - y$ тэгшитгэлийн бүх натурал тоон шийдийг ол.

Бодлого Б2. Өгөгдсөн a_1, a_2, ..., a_n дарааллын гишүүд дээр дараах үйлдлүүдийг хийж болно. Аливаа $1 \leq k \leq n-2$ дугаарын хувьд

1) a_k, a_{k+2} гишүүдийг 1-ээр ихэсгээд, a_{k+1} гишүүнийг 1-ээр багасгаж, эсвэл

2) a_k, a_{k+2} гишүүдийг 1-ээр багасгаад, a_{k+1} гишүүнийг 1-ээр ихэсгэж

болно. Анх 1, 2, ..., 2022 гэсэн дараалал өгөгдсөн бол дээрх үйлдлүүдийг давтан хийх замаар дарааллын бүх гишүүдийг тэнцүү болгож чадах уу?

Бодлого Б3. Дараах чанартай хамгийн бага натурал N тоог ол.

> Дурын бүхэл коэффициенттой, таван зэргийн $P(x)$ олон гишүүнтийн хувьд $|P(x)| > \dfrac{1}{N}$ байх $0 \le x \le 1$ тоо олдоно.

Бодлого Б4. $n \ge 1$ гэе. Ялгаатай $a_1, \ldots, a_{2n+2}$ бүхэл тоонууд өгөгдөв. Хэрэв $|i-j| \le n$ байх i, j дугаар бүрийн хувьд $|a_i - a_j| \le n$ байдаг бол $a_{2n+2} - a_1$ ялгавар $(2n+1)$-д хуваагдахыг харуул.

Бодлого Б5. ABC гурвалжинд багтсан тойргийн төв I цэгийг дайруулан BI хэрчимд перпендикуляр байхаар татсан шулуун ABC гурвалжныг багтаасан тойргийн AB ба BC бага нумуудтай харгалзан X ба Y цэгүүдэд огтлолцоно. $AI \parallel PY$ ба $CI \parallel XP$ байхаар P цэгийг сонгоё. Хэрэв XA ба YC шулуунууд Q цэгт огтлолцдог бол I, P, Q цэгүүд нэг шулуун дээр оршино гэж батал.

Бодлого Б6. Дараах чанартай хамгийн бага эерэг бодит $0 < c < 1$ тоог ол.

> $n \ge 3$ оройтой, гурвалжин агуулаагүй, орой бүрийн зэрэг нь cn тооноос эрс их байдаг энгийн граф бүр хоёр туйлт байна.

Тайлбар: гогцоогүй, өөрөөр хэлбэл нэг оройгоос эхлээд тэр орой дээрээ дуусдаг ирмэггүй, ямар ч хоёр оройг нэгээс олон ирмэг холбодоггүй, чиглэлгүй графыг энгийн граф гэнэ. Оройгоос гарсан ирмэгийн тоог тус оройн зэрэг гэнэ. Аль ч хоёр нь ирмэгээр холбогдсон гурван оройтой графыг гурвалжин гэнэ. Ижил өнгөтэй оройнууд ирмэгээр холбогдоогүй байхаар оройнуудыг нь хоёр өнгөөр будаж болдог графыг хоёр туйлт гэнэ.

УЛСЫН МАТЕМАТИКИЙН XXXXXIX ОЛИМПИАД

Бодлогууд

Е (9-10) ангилал

Бодлого Е1. $(a+b)^2 = a^3 + b^3$ байдаг бүх бүхэл тоон $a \le b$ хосыг ол.

Бодлого Е2. Элдэв талт ABC гурвалжны BC тал дээр B ба C цэгээс ялгаатай X цэг тэмдэглэв. ABC гурвалжны AL биссектрисийн хувьд AX шулуунтай тэгш хэмтэй шулуун BC шулууныг Y цэгт огтолно. AL хэрчмийн дундаж цэгт татсан перпендикуляр шулуун BC талтай O цэгт огтлолцоно. ABX ба ACY гурвалжнуудыг багтаасан тойргийн төвүүд болон O цэг нэг шулуун дээр оршино гэж батал.

Бодлого Е3. k натурал тоо гэе. Аль ч хоёрынх нь ялгавар 2023-д хуваагддаггүй, дараах чанартай a_1, a_2, ..., a_{2021} бүхэл тоон дараалал оршин байдаг бол k тоог *сайн тоо* гэж нэрлэе: ямар ч a_i гишүүний хувьд $a_i - ka_j$ ялгавар 2023-д хуваагддаг байх a_j гишүүн олдоно.

100-аас хэтэрдэггүй бөгөөд тэгш хамгийн их сайн тоог ол.

Бодлого E4. ABC гурвалжны AC талын дундаж цэгийг M гэж тэмдэглэе. ABC гурвалжны дотор талд $\angle BAP = \angle BCP$ байх P цэг авав. CP шулуун AB талыг R цэгт огтолдог гээд B оройгоос CP шулуунд буулгасан перпендикулярын суурийг Q гэе. Q цэг ABC гурвалжин дотор орших ба $QM = PC/2$ бол $RQ = QP$ гэж батал.

Бодлого E5. $n \times n$ шатрын хөлгийн нүднүүдэд нүд бүрийн хөршүүдийн яг хоер нь даамтай байхаар даамууд байрлуулж болдог бүх натурал n тоог ол. Ерөнхий талтай хоёр нүдийг хөрш гэнэ.

Бодлого E6. a, b, c тоонуудын хувьд $0 \le a \le b \le c$ ба $a + b + c = 1$ байдаг бол

$$ab\sqrt{b-a} + bc\sqrt{c-b} + ca\sqrt{c-a} < \frac{1}{4}$$

гэж батал.

F (11-12) ангилал

Бодлого F1. Дурын u, v эерэг тоонуудын хувьд

$$\min\left\{u, \frac{100}{v}, v + \frac{2023}{u}\right\} \le \sqrt{2123}$$

тэнцэтгэл биш биелэхийг батал. Энд $\min X$ гэж X олонлогийн хамгийн бага гишүүнийг тэмдэглэнэ.

Бодлого F2. Хурц өнцөгт ABC гурвалжны BD, CE өндрүүдийг татав. BD хэрчим дээр $AD = DL$ байх L цэгийг, CE хэрчим дээр $AE = EK$ байх K цэгийг авав. KL хэрчмийн дундаж цэгийг M гэе. ABC гурвалжныг багтаасан тойрог AL шулуунтай дахин T цэгт, AK шулуунтай дахин S цэгт огтлолцоно. BS, CT, AM шулуунууд нэг цэгт огтлолцоно гэж батал.

Бодлого F3. Тэмцээнд таван охин, таван хөвгүүн оролцов. Дурын $1 \le i, j \le 5$ хувьд i дугаартай охин ба j дугаартай хөвгүүн хоёр хоёулаа таньдаг хүүхдийн тоо $|i - j|$ байдаг байхаар охидыг 1, 2, ..., 5 гэж, хөвгүүдийг мөн адил 1, 2, ..., 5 гэж дугаарлаж болдог байв. Охидын таньдаг хүүхдийн тооны нийлбэр ба хөвгүүдийн таньдаг хүүхдийн тооны нийлбэр хоёрын аль ихийг S гэвэл S тоо хамгийн багадаа хэд байж болох вэ? Танилын харилцаа чиглэлтэй, өөрөөр хэлбэл A хүүхэд B хүүхдийг таньдаг байлаа гээд B хүүхэд A хүүхдийг таних албагүй, ба хүүхдийг өөртэй нь танил гэж тооцохгүй.

Бодлого F4. Бүх бодит тооны олонлогийг $\mathbb{R}$ гэж тэмдэглэе. Дурын x, y, $z \in \mathbb{R}$ бодит тоонуудын хувьд

$$f(x+y-z)^2 = f(xy) + h(x+y+z, xy+yz+zx)$$

байдаг бүх $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ба $h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ функцийг ол.

Бодлого F5. Ангид хэдэн хүүхэд байв. Аль ч зургаан хүүхдийг авахад хоорондоо найз биш хоёр хүүхэд олддог ба дурын ийм найз биш хос сонгоход хоёулантай нь найз хүүхэд үлдсэн дөрвөн хүүхэд дотор байдаг байв. Ангид хамгийн олондоо хэдэн хүүхэд байгаа вэ?

Бодлого F6. m натурал тоо өгөгдөв. Тойрог дээр бичигдсэн, аль ч дэс дараалсан m ширхэг тооны нийлбэр m-ийн зэрэгт байдаг натурал тоон дарааллыг *сайн дараалал* гэе.

(1) $n \geq 2$ хувьд mn урттай дурын сайн дарааллын m ширхэг гишүүнийг дарж $mn - m$ урттай сайн дараалал үүсгэж болно гэж харуул.

(2) m^2 урттай дурын сайн дарааллын ямар нэгэн гишүүн ядаж m удаа давтаж бичигдсэн гэж харуул.

Т (ДБ) ангилал

Бодлого T1. Огторгуйд бөмбөлөг ба түүнийг шүргэдэг хоёр хавтгай өгөгдөв. Гурвууланг нь шүргэдэг бөмбөлгийн төв бэхлэгдсэн эллипс дээр оршино гэж батал.

Бодлого T2. n натурал тоо гэе. Төгсгөлөг X олонлог дээр тодорхойлогдсон f_1, f_2, ..., f_n ба g_1, g_2, ..., $g_n\colon X \to [0,1]$ функцүүд дурын $1 \leq i,\, j \leq n$ хувьд

$$\sum_{x \in X} f_i(x) = \sum_{x \in X} g_j(x) = S \quad \text{ба} \quad \sum_{x \in X} f_i(x) g_j(x) = |i - j|$$

нөхцөлийг хангадаг гэе. Энд $[0,1] = \{0 \leq t \leq 1\}$ завсар.

(1) $S \geq n - 1$ гэж батал.

(2) $S = n - 1$ хувьд дээрх нөхцөл хангах төгсгөлөг X олонлог болон f_1, f_2, ..., f_n ба g_1, g_2, ..., $g_n\colon X \to [0,1]$ функцүүдийн жишээ байгуул.

Бодлого T3. n натурал тоо гэе. $n \times n$ шатрын хөлгийн хэдэн нүдийг ногооноор будав. Дурын ногоон нүднээс эхэлсэн тэрэг нүүдэл болгондоо хэвтээ босоо чиглэлээ өөрчлөн, ногоон нүд дамжиж явахад зургаан нүүдлийн дотор анх эхэлсэн байрандаа ирж чаддаггүй байв. Энд байрнаасаа хөдлөхгүй байхыг тооцохгүй. Ногооноор будагдсан нүдний тоо $2n(1 + \sqrt[3]{n})$ тооноос бага гэж харуул.

Бодлого T4. Нэг шулуун дээр орщдоггүй аль ч гурван цэг нь мохоо өнцөгт гурвалжин үүсгэдэггүй байхаар хавтгайд хамгийн олондоо хэдэн цэгийг бүгд нэг шулуун дээр орщдоггүй байхаар байрлуулж болох вэ?

Бодлого T5. n, $m \geq 3$ сондгой тоонууд өгөгдөв. Аль ч дэс дараалсан m ширхэг тооны нийлбэр m-ийн зэрэгт байхаар $mn-1$ ширхэг натурал тоог тойрог дээр бичив. Дарааллын ямар нэг гишүүн ядаж $m + 1$ удаа давтаж бичигдсэн гэж харуул.

Бодлого T6. $-1 < x_1, x_2, \ldots, x_n < 1$ бодит тоонуудын нийлбэр $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0$ бол

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i x_j \sqrt{1 - x_i^2 x_j^2} \leq 0$$

болохыг харуулж, тэнцэл биелэх нөхцөлийг ол.

УЛСЫН МАТЕМАТИКИЙН XXXXXX ОЛИМПИАД

Бодлогууд

E (9-10)

Бодлого E1. Тэгээс ялгаатай a, b, c бодит тоонуудын хувьд $\dfrac{a+b}{c} = \dfrac{b+c}{a} = \dfrac{c+a}{b}$ байв.

(1) $a^3 + b^3 + c^3 \neq 0$ болохыг батал.

(2) $\dfrac{(a+b)(b+c)(c+a)}{a^3+b^3+c^3}$ илэрхийллийн авч болох бүх утгыг ол.

Бодлого E2. Самбарт бичигдсэн үгэн дээр дараах 3 төрлийн үйлдлийн аль нэгийг хийж болно. x, y, z, a, b, c нь үсгүүд болог.

(1) Аливаа xy дэд үгийг $xzzy$ болгон өөрчилж болно. Жишээ нь $abc \to addbc$ болно.

(2) Аливаа xyz дэд үгийг zyx болгон өөрчилж болно. Жишээ нь $cabc \to ccba$ болно.

(3) Аливаа $xyyx$ хэлбэрийн дэд үгийг арилгаж болно. Жишээ нь $abcaacc \to abc$ болно.

Дээрх үйлдлүүдийн тусламжтайгаар $abccab$ үгээс $baccba$ үгийг гарган авч болох уу?

Тайлбар: xyz *үгийн хувьд* x, y, z, xy, yz, xyz *дэд үг болно, харин* xz *дэд үг биш.*

Бодлого E3. $m \geq 2$ натурал тоо, $p \geq 5$ анхны тоо гэе. $n \geq 1$ хувьд $a_n = (p-2)^n + p^n - m$ гэж тодорхойлогдох a_1, a_2, ... дарааллын ямар нэг гишүүнийг хуваадаг хамгийн бага анхны тоог q гэе. $q \geq m$ байх бүх (m, p) хосыг ол.

Бодлого E4. $2^a + 2^b + 2^c + 2^d = 60 \cdot \min\{a, b, c, d\}$ тэгшитгэлийн бүх натурал тоон шийдийг ол. Энд a, b, c, d тоонуудын хамгийн багыг $\min\{a, b, c, d\}$ гэж тэмдэглэв.

Бодлого E5. $AB = BC$ байх адил хажуут ABC гурвалжны AC талын дундаж цэгийг M гэе. BM хэрчмийн дундаж цэгийг N гээд AMN гурвалжны AN талд буулгасан өндрийн суурийг P гэе. APM ба CPB гурвалжнууд төсөөтэй гэж батал.

Бодлого E6. $a, b, c \geq 0$ сөрөг биш тоонуудын хувьд $a^3 + b^3 + c^3 = abc + 2$ бол

$$a^4 + b^4 + c^4 \geq a + b + c$$

байна гэж батал.

F ангилал (11-12 анги)

Бодлого F1. $a! + b! = c^4 + 2024$ тэгшитгэл $a \leq b$ байх (a, b, c) натурал тоон цор ганц шийдтэй болохыг баталж шийдийг ол.

Бодлого F2. Гүдгэр таван өнцөгтийн гурван орой дээр оройтой гурвалжны талбай өгсөн таван өнцөгтийн талбайн хагасаас их бол уг гурвалжныг *том* гэе. Гүдгэр таван өнцөгтөд том гурвалжин хамгийн олондоо хэд байж болох вэ?

Бодлого F3. Эерэг бодит тоон олонлогийг $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x > 0\}$ гэж тэмдэглэе. Дурын x, $y \in \mathbb{R}^+$ тоонуудын хувьд

$$f(x)f(y + f(x)) = f(1 + xy)$$

байдаг бүх $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ функцийг ол.

Бодлого F4. Сөрөг биш коэффициенттой $P(x)$ ба $Q(x)$ олон гишүүнтүүд өгөгдөв.

$P(x)$-ийн уламжлалыг $P'(x)$ гэе. $P(0) = Q(0) = 0$ ба $Q(1) \leq 1 \leq P'(0)$ байв.

(1) Дурын $0 \leq x \leq 1$ тооны хувьд $0 \leq Q(x) \leq x \leq P(x)$ байна гэж батал.

(2) Дурын $0 \leq x \leq 1$ тооны хувьд $P(Q(x)) \leq Q(P(x))$ байна гэж батал.

Тэнцэл биелэх нөхцөлийг олох шаардлагагүй.

Бодлого F5. Хурц өнцөгт ABC гурвалжинд BE ба CF өндрүүд татав. AD хэрчим ABC гурвалжныг багтаасан тойргийн диаметр болно. BC талын дундаж цэгийг M гэе. BMF ба CME гурвалжинд багтсан тойргуудын дотоод ерөнхий шүргэгчүүд K цэгт огтлолцдог байв. K, M, D цэгүүд нэг шулуун дээр оршино гэж батал.

Бодлого F6. $n \geq 1$ гишүүнтэй натурал тоон $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ олонлогийг авч үзье. Дурын ялгаатай $X \neq Y \subseteq A$ дэд олонлогуудын хувьд $S(X) - S(Y)$ ялгавар 2^n тоонд хуваагддаггүй бол A олонлогийг *сайн* гэе. Энд $X \subseteq A$ дэд олонлогийн гишүүдийн нийлбэрийг $S(X) = \sum\limits_{a \in X} a$ гэж тэмдэглэх ба $S(\emptyset) = 0$ гэж тодорхойлно.

Бүх гишүүн нь 2^n тооноос бага байдаг сайн олонлогийн тоог ол.

Т ангилал (Дунд ангийн багш)

Бодлого Т1. $n \geq m \geq 1$ байх натурал тоонуудын хувьд

$$(a^n - b^n)^2 = a^{n+m} - b^{n+m}$$

тэгшитгэл $|a| > |b| > 1$ байх (a, b) харилцан анхны бүхэл тоон шийдгүй болохыг харуул.

Бодлого Т2. $AB \neq AC$ байх ABC гурвалжныг багтаасан тойргийг ω гээд BC талын дундаж цэгийг M гэе. ω тойргийн B болон C цэгт татсан шүргэгч шулуунууд T цэгт огтлолцоно. AMT гурвалжныг багтаасан тойрог BC шулуунтай дахин N цэгт огтлолцоно. NT хэрчмийн дундаж цэг S бол SA шулуун ω тойргийн шүргэгч болно гэж батал.

Бодлого Т3. Эерэг бодит тоон олонлогийг $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ гэж тэмдэглэе. Дурын $x \in \mathbb{R}^+$ тооны хувьд

$$f(g(x)) = f(x)g(x) \quad \text{ба} \quad f(x) = x(1 + g(x))$$

байдаг бөгөөд $g(x)$, $g(g(x))$, $g(g(g(x)))$, ... дараалал төгсгөлөг ширхэг ялгаатай утга авдаг байх бүх $f, g \colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ хос функцийг ол.

Бодлого Т4. Гурвалжны α, β, γ өнцгүүдийн хувьд

$$\cos(\alpha)\cos(3\alpha) + \cos(\beta)\cos(3\beta) + \cos(\gamma)\cos(3\gamma) + \frac{7}{4} \geq 2\cos(\alpha)\cos(\beta)\cos(\gamma)$$

байна гэж батал.

Бодлого Т5. m, n натурал тоонууд байг. $m \times n$ хэмжээтэй тэгш өнцөгт хүснэгт өгөгдөв. Тэгш өнцөгтийн аль нэг талтай параллел хэрчмийг *сайн* гэе. Хүснэгтийг зангилааны цэгүүд дээр оройтой гурвалжнуудад хуваав. Эдгээр бүх гурвалжнуудын ядаж нэг тал сайн байсан ба аль ч сайн талд буулгасан өндөр нэгж урттай байв. Яг хоёр сайн талтай гурвалжин хамгийн цөөндөө хэд байх вэ?

Бодлого Т6. Дурын $n, m \geq 1$ дугааруудын хувьд $na_n - ma_m + 2a_m - 1$ илэрхийлэл $a_n + a_m - 1$ тоонд хуваагддаг байх бүх натурал тоон a_1, a_2, ... дарааллыг ол.